

Javító vizsga tematika 10. osztály

NAT 2020

1. Egyenletrendszerek grafikus megoldása
2. Egyenletrendszer megoldása algebrai módszerekkel
3. Hatványozás
4. Normálalak
5. A négyzetgyökvonás azonosságai
6. Függvénytranszformációk
7. Másodfokú függvények
8. Másodfokú kifejezés, másodfokú egyenlet, teljes négyzetté kiegészítés
9. A másodfokú egyenlet megoldása megoldóképlettel, diszkrimináns
10. A kör kerülete, területe
11. Középponti szög, körív, körcikk
12. Számsokaságok statisztikai jellemzői
13. Valószínűségszámítás
14. Gyökös egyenletek
15. Másodfokú egyenlőtlenségek
16. Polinom gyöktényezőss alakja
17. Hasonlóság
18. Háromszögek középvonalai, súlyvonalai

A tematikát az OHMAT10TA I és II-es kötetei alapján állítottam össze.

Javasolt irodalom a fenti két kötet és a Négyjegyű Függvénytáblázatok valamint a Melléklet.

A Felkészülést nagyban segíti a tanév során a füzetben elkészített feladatok áttekintése, ismételt megoldása.

A vizsga írásban és szóban történik.

A javító vizsgán a Mellékletben megjelölt feladatokból és elméletekből áll össze a feladatsor.

Készítette: Bebrevszky-Hillender Anita

Isaszeg, 2021. június 21.

1. Egyenletrendszerek grafikus megoldása

ELMÉLET

Ha két vagy több egyenlet közös megoldásait keressük, akkor **egyenletrendszerről** beszélünk.

Az egyenletrendszerek lehetséges jelölései:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} (1) & x + y = 7 \\ (2) & 4x + 2y = 20 \end{matrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{matrix} x + y = 7 \\ \underline{4x + 2y = 20} \end{matrix}$$

vagy akár ezek együttes alkalmazása.

Példánkban két ismeretlen szerepel, mindkettő első hatványon, ezért ezek az egyenletek **elsőfokú (vagy lineáris), kétismeretlenes egyenletrendszert** alkotnak.

Az elsőfokú, kétismeretlenes **egyenletrendszer megoldása** olyan **rendezett számpár**, amely mindkét egyenletet igazgá teszi.

Az egyenletrendszer megoldásának egyik módszere a **grafikus módszer**, melynek lépései:

1. A megoldandó egyenletrendszer egyenleteiből kifejezzük az egyik ismeretlent (általában y -t).
2. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az ezekhez tartozó lineáris függvényeket!
3. Olvassuk le a két grafikon metszéspontjának koordinátáit! A közös pont mindkét grafikonra illeszkedik, ezért koordinátái igazgá teszik az egyenletrendszer mindkét egyenletét. Az egyenletrendszer megoldását tehát a közös pont koordinátái, vagyis egy rendezett valós számpár adja.
4. Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy a grafikonról leolvasott érték valóban megoldása az egyenleteknek!

Oldd meg grafikusán az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 3x - y = -9 \\ 2x + y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 5y = 10 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

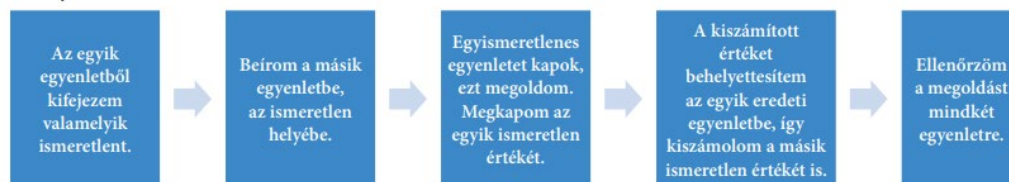
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x - 3y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ -2x + 10y = 0 \end{cases}$

2. Egyenletrendszer megoldása algebrai módszerekkel

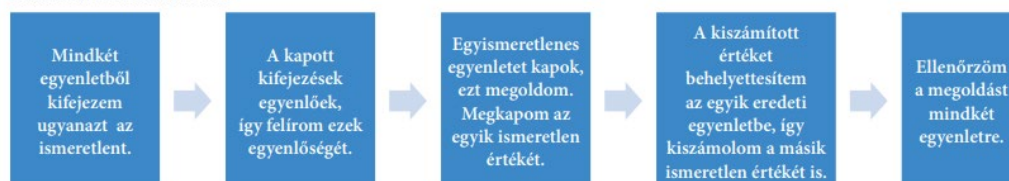
ELMÉLET

Behelyettesítő módszer:



A módszer hátránya, hogy bonyolult (pl. törtes) egyenletekre vezethet a megoldás menete.

Összehasonlító módszer:



A módszer hátránya, hogy bonyolult (pl. törtes) egyenletekre vezethet a megoldás menete.

Egyenlő együtthatók módszere:



A módszer előnye, hogy elkerülhető a bonyolult (pl. törtes) egyenletekre való visszavezetés.

Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ -5x - 6y = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 4y = -15 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 8x - 3y = 19 \\ -6x + 5y = -18 \end{cases}$$

3. Hatványozás

Megtanultuk például, hogy a 2^5 hatványkifejezés egy szorzás műveletet szimbolizál, melyben a tényezők mindegyikének értéke 2, a tényezők száma pedig 5, azaz $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Definíció: Ha $a \neq 0$, és n pozitív egész szám, akkor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Az azonos alapú hatványok hányadosára vonatkozó azonosság miatt $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, vagyis negatív egész kitevőre úgy hatványozunk, hogy az alap reciprokát emeljük a kitevő ellentettjére.

Definíció: Ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$, vagyis bármely nullától különböző valós szám nulladik hatványa 1.

Például: $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$; $(-3)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$.

Tétel: (a hatványozás azonosságai $a; b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $m; n \in \mathbf{Z}$ esetén)

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; ha $a \neq 0$
Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Szorzat hatványa egyenlő a tényezők hatványának szorzatával.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Hányados hatványa egyenlő a számláló hatványának és a nevező hatványának hányadosával.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; ha $b \neq 0$

A 0^0 nem értelmezett.

1. Hányadik hatványa

- a) 2-nek a 128? c) 2-nek az $\frac{1}{128}$?
b) $\frac{1}{2}$ -nek a 128? d) $\frac{1}{2}$ -nek az $\frac{1}{128}$?

2. Hányadik hatványa 10-nek:

- a) ezerszer egytized?
b) százszor százszor száz?
c) egyszázadszor egyezred?

3. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$0,25^2$; 4^{-3} ; 3^{-4} ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $(-2)^{-3}$; -2^{-3}

4. Végezd el a kijelölt műveleteket $a; b \in \mathbf{R}^+$ értékei mellett!

$$3a^{-4}b^2 \cdot a^3b^{-4}; \quad a^3b^{-4} : \left(-\frac{a}{b}\right)^{-5};$$

$$-3a^{-4}b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{-5}; \quad \left(-\frac{a^{-4}}{b^3}\right)^3 : \left(\frac{b^2}{a}\right)^{-4}$$

4. Normálalak

Számok normálalakja

Kicsi és nagy abszolút értékű számok leírásakor sokszor használjuk a szám normálalakját. Egy 0-tól különböző szám **normálalakja** egy olyan kéttényezős szorzat, amelyben az egyik tényező abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő 1-nél és kisebb 10-nél, a másik tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa:

$a \cdot 10^k$; ahol $1 \leq |a| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$.

10 📡 Számológép használata nélkül végezd el az alábbi műveleteket, majd add meg az eredményeket normálalakban!

a) $35\,000\,000 \cdot 0,0002 \cdot (0,03)^{-2} =$

b) $(50\,000)^{-4} : (0,00004)^{-1} =$

c) $7,4 \cdot 10^{-20} - 1,6 \cdot 10^{-22} =$

5. A négyzetgyökvonás azonosságai

1. A négyzetgyökvonás azonosságai

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával (ha a tényezők nem negatív számok).

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

ha $a \geq 0; b \geq 0$

Például: $\sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{16} = 9 \cdot 4 = 36; \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

(de az értelmezés miatt nem áll fenn, hogy $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = \sqrt{16} = 4$)

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával (ha a számláló nem negatív, a nevező pozitív szám).

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

ha $a \geq 0; b > 0$

Például: $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}; \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{52}{13}} = \sqrt{4} = 2$

Hatvány négyzetgyöke egyenlő a hatványalap négyzetgyökének hatványával (ha a hatványalap nem negatív).

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n,$$

ha $a > 0; n \in \mathbb{Z}$

Például: $\sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64; (\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$

A normálalakban megadott szám négyzetgyökét akkor tudjuk az azonosságok segítségével könnyen meghatározni, ha a normálalakban a 10 kitevője páros szám. Ha a kitevő páratlan, akkor alakítsuk a normálalakban megadott számot olyan szorzattá, amelyben a 10 kitevője páros.

Például:

$$\sqrt{9 \cdot 10^6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10^6} = 3 \cdot 10^3, \text{ mert } (3 \cdot 10^3)^2 = 9 \cdot 10^6;$$

$$\sqrt{8,1 \cdot 10^5} = \sqrt{81 \cdot 10^4} = 9 \cdot 10^2, \text{ mert } (9 \cdot 10^2)^2 = 81 \cdot 10^4.$$

2. Gyökvonás egy valós szám négyzetéből

Vizsgáljuk meg a $\sqrt{a^2}$ kifejezést!

a) A négyzetgyökvonás értelmezése miatt teljesülnie kell az $0 \leq a^2$ relációnak.

Tudjuk, hogy bármely valós szám négyzete nemnegatív, ezért a bármilyen valós szám lehet, tehát $a \in \mathbb{R}$.

b) Vizsgáljuk a kifejezést az a lehetséges előjelei szerint egy-egy példán keresztül!

Legyen $a = -3$, ekkor $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$.

Legyen $a = 5$, ekkor $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ha a negatív valós szám, akkor a művelet eredménye az eredeti szám ellentettje, ha a nemnegatív valós szám, akkor a művelet eredménye az eredeti szám értéke, azaz bármely esetben az eredeti szám abszolút értékét kaptuk.

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{ahol } a \in \mathbb{R}.$$

16 ✎ Négyzetgyökjel alá bevitel segítségével írd egyszerűbb alakba!

$$2\sqrt{8}; \quad \frac{1}{3}\sqrt{15}; \quad 7\sqrt{\frac{2}{7}}; \quad 0,1 \cdot \sqrt{10}$$

17 ✎ Írd fel egyszerűbb alakban a szorzatokat!

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}; \quad \sqrt{11} \cdot \sqrt{33}; \quad \sqrt{20} \cdot \sqrt{72}$$

18 ✎ Végezd el a következő műveleteket! Ne használj számológépet!

a) $(\sqrt{18} + \sqrt{50} + 9\sqrt{2})\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{3})\sqrt{3}$

19 ✎ Végezd el a következő műveleteket! Ne használj számológépet!

a) $(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{3})$

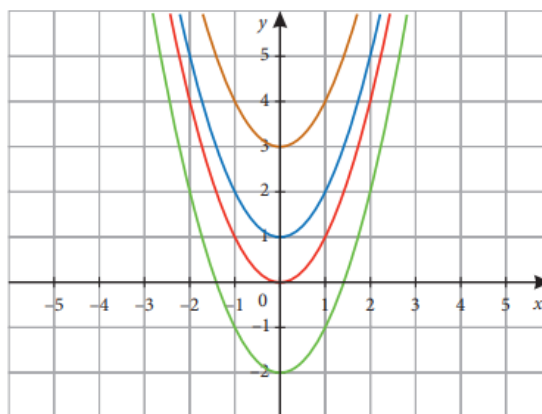
6. Függvénytranszformációk

1. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2$ függvény grafikonja egy **parabola**, melynek szimmetriatengelye az y tengely. A parabolának a szimmetriatengelyen lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük. Ennek a parabolának a tengelypontja az origó.

2. Hogyan változik a függvény grafikonja, ha a valós számok halmazán az $x \mapsto x^2$ helyett az $x \mapsto x^2 + 3$ hozzárendelési szabályt alkalmazzuk?

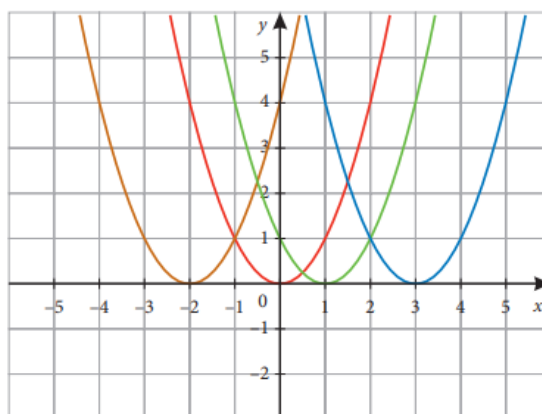
Ekkor minden függvényérték 3-mal nagyobb lesz, mint az első esetben. Grafikonon ez azt jelenti, hogy a parabolát az y tengely mentén felfelé kell tolni 3 egységgel.

$$\begin{array}{llll} x \mapsto x^2 + 3; & x \mapsto x^2 + 1; & x \mapsto x^2; & x \mapsto x^2 - 2 \\ y = x^2 + 3; & y = x^2 + 1; & y = x^2; & y = x^2 - 2 \end{array}$$



3. Hogyan változik a függvény grafikonja, ha az $x \mapsto x^2$ helyett az $x \mapsto (x - 3)^2$ hozzárendelési szabályt alkalmazzuk? Ekkor nem az $x = 0$ helyen veszi fel a függvény a 0-t, hanem a 3-mal nagyobb számnál, az $x = 3$ helyen. Grafikonon ez azt jelenti, hogy a parabolát az x tengely mentén jobbra kell tolni 3 egységgel.

$$\begin{array}{llll} x \mapsto (x + 2)^2; & x \mapsto x^2; & x \mapsto (x - 1)^2; & x \mapsto (x - 3)^2 \\ y = (x + 2)^2; & y = x^2; & y = (x - 1)^2; & y = (x - 3)^2 \end{array}$$



Legyen a függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és c egy valós szám ($c \neq 0$).

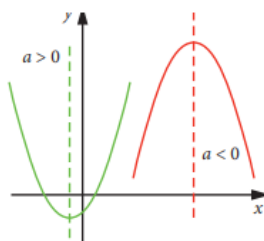
Hogyan kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából a **függvénytranszformáció** során nyert függvény grafikonját?

$f(x) + c$	Eltoljuk f grafikonját az y tengellyel párhuzamosan c -vel.	„fel-le”
$f(x - c)$	Eltoljuk f grafikonját az x tengellyel párhuzamosan $(-c)$ -vel.	„jobbra-balra”
$c \cdot f(x)$	„Megnyújtjuk” vagy „zsugorítjuk” f grafikonját. Ha c negatív, akkor tükrözzük is az x tengelyre.	„soványabb-kövérébb”
$-f(x)$	Tükrözzük f grafikonját az x tengelyre. (ez az előzőnek egy speciális esete)	tükrözés az x tengelyre
$ f(x) $	Ahol f értéke negatív, azt a görbedarabot tükrözzük az x tengelyre.	

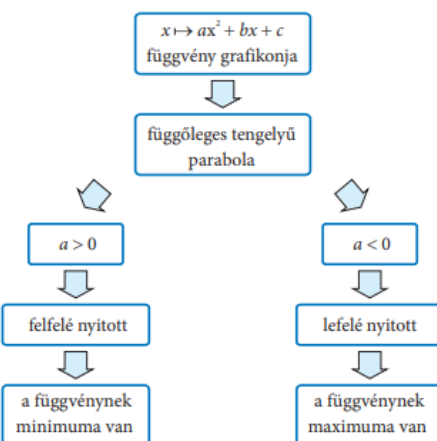
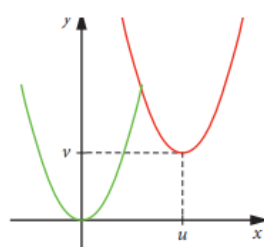
7. Másodfokú függvények

1. Ha a, b és c adott számok, és $a \neq 0$, akkor a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvényt **másodfokú függvénynek** nevezzük. A másodfokú tagban szereplő együtthatót (vagyis az a -t) **főegyütthatónak** hívjuk.
Például: az $x \mapsto 3x^2 - 2x - 5$ függvény másodfokú, továbbá itt $a = 3$, $b = -2$ és $c = -5$, a főegyüttható 3.

2. Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, melynek tengelye merőleges az x tengelyre. Ez a parabola „felfelé” nyitott, ha főegyütthatója pozitív, azaz $a > 0$, és „lefelé” nyitott, ha főegyütthatója negatív, azaz $a < 0$.

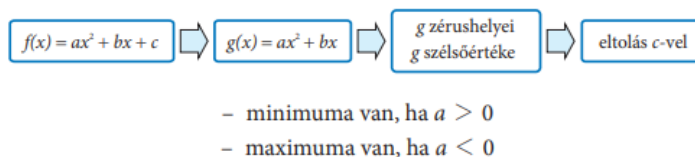


3. Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ hozzárendelési szabály algebrai módszerekkel átalakítható $x \mapsto a(x-u)^2 + v$ alakra. Az itt szereplő u és v éppen a parabola tengelypontjának az első, illetve második koordinátája. E számok azt is megmutatják, mennyivel kell eltolni az $x \mapsto ax^2$ függvény grafikonját a koordinátatengelyek mentén, hogy az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját kapjuk.



A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) másodfokú függvény ábrázolásának egyik útja:

- Első lépésként az f helyett a konstans tag (c) elhagyásával kapott g függvény grafikonját ábrázoljuk 3 pontjával. A $g(x) = ax^2 + bx$ függvény képe egy parabola.
 - Zérushelyeit megkaphatjuk az $ax^2 + bx = 0$ egyenletről. A kifejezést alakítsuk szorzattá! (Az egyik zérushely a 0.)
 - A szimmetriatengely az x tengelyre merőleges, és a két zérushely között „középen” (számtani közepénél) metszi a tengelyt.
 - A parabola tengelypontjának első koordinátáját a szimmetriatengely jelöli ki. A másik koordinátát megkapjuk, ha behelyettesítünk g -be. (Ellenőrizhetjük, hogy a parabola felfelé nyitott, ha $a > 0$; illetve lefelé nyitott, ha $a < 0$.)
- Az f függvény grafikonját megkapjuk, ha a g grafikonját (3 pontja segítségével) az y tengely mentén c -vel eltoljuk.



1. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját!

a) $f(x) = |x - 1,5| + 1$

b) $g(x) = (x - 1)^2 - 4$

c) $h(x) = -x^2 + 3$

2. A táblázatban szereplő függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Írd a függvényekhez a rájuk jellemző tulajdonság betűjelét!

a: minimuma van

e: maximumhelye az 5

b: maximuma van

f: minimumhelye a -5

c: értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza

g: zérushelye az 5

d: minimumhelye az 5

$x \mapsto x - 5 + 1$	$x \mapsto (x + 5)^2$	$x \mapsto -(x - 5)^2$	$x \mapsto (x - 5)^2 + 2$	$x \mapsto 2x^2 - 5x$

3. Ábrázold a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ függvény grafikonját!

4. Ábrázold a következő függvények grafikonját, majd határozd meg a függvények értékkészletét, szélsőérték helyeit és szélsőértékeit!

a) $f: [-3; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2|$

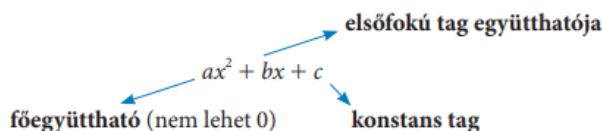
b) $g: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 2)^2 + 2$

8. Másodfokú kifejezés, másodfokú egyenlet, teljes négyzetté kiegészítés

I. Másodfokú kifejezés, másodfokú egyenlet

Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést, melyben a , b és c valós számok, és $a \neq 0$, **másodfokú kifejezésnek** nevezzük. Másik elnevezése: **másodfokú polinom**.

A másodfokú kifejezésben mindig szerepel a változó (pl. x) második hatványa, ennek együtthatója a **főegyüttható**. Ezen kívül szerepelhet a változó első hatványa egy együtthatóval szorozva, valamint a változót nem tartalmazó, úgynevezett **konstans tag**.



A **másodfokú egyenlet** rendezett, úgynevezett kanonikus alakja: $ax^2 + bx + c = 0$, ahol $a \neq 0$.

II. Teljes négyzet

Egy kéttagú kifejezés négyzetét nevezetes azonosság segítségével felírhatjuk más alakban is:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \text{illetve} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Amennyiben egy másodfokú kifejezés felírható egy kéttagú kifejezés négyzeteként, akkor azt mondjuk, hogy az teljes négyzetté alakítható.

Például: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

$$x^2 - 2,4x + 1,44 = (x - 1,2)^2$$

III. Teljes négyzetté kiegészítés

A **teljes négyzetté kiegészítés** módszerét másodfokú kifejezések esetén használhatjuk a kifejezés átalakítására. Ezzel az eljárással egy másodfokú kifejezést egy teljes négyzet felhasználásával írunk fel.

Például: $x^2 - 8x + 9 = (x - 4)^2 - 7$

Ha a főegyüttható 1 ($a = 1$), akkor lépései a következők:

1. Azonosítsuk, hogy melyik az a teljes négyzet, melyben az egyik tag négyzete, valamint a két tag szorzatának kétszerese megtalálható a másodfokú kifejezésben!

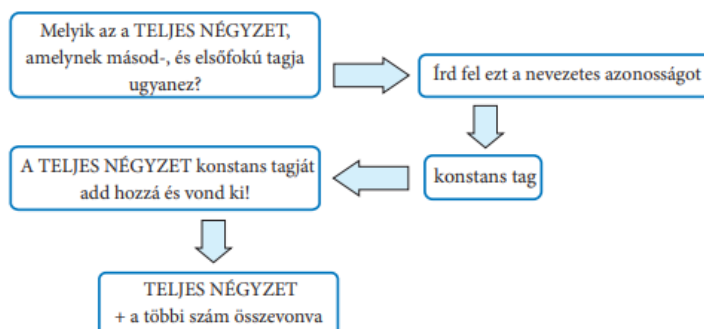
Például: $x^2 - 8x + 9$ esetén azt keressük, hogy $x^2 - 8x$ melyik teljes négyzet két tagjával egyezik meg. $(x - 4)^2$ a keresett teljes négyzet, hiszen $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

2. Adjuk hozzá és vonjuk le a teljes négyzet konstans tagját az eredeti kifejezéshez! Így az eredeti kifejezés értéke nem változik meg.

Például: $x^2 - 8x + 9 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 9$

3. A kifejezésben előáll a teljes négyzet, ezt írjuk le, a megmaradt számokat pedig vonjuk össze! (Az eredeti kifejezés értéke most sem változik meg.)

Például: $x^2 - 8x + 9 = \underbrace{(x^2 - 8x + 16)}_{(x-4)^2} \underbrace{-16+9}_{-7} = (x - 4)^2 - 7$



1  Végezd el a következő műveleteket!

a) $(x - 9)^2$

c) $(x - 0,7)^2$

b) $(x + 1,1)^2$

d) $(x + 3,5)^2$

2  Egészítsd ki a következő kifejezéseket úgy, hogy teljes négyzetet kapj!

a) $x^2 + 14x + \dots$

c) $x^2 + 3x + \dots$

b) $x^2 - 4x + \dots$

d) $x^2 - 3x + \dots$

3  A nevezetes azonosság segítségével végezd el a teljes négyzetté kiegészítést!

$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

a) $x^2 + 12x + 39$

c) $x^2 + 12x + 6$

b) $x^2 + 12x + 100$

d) $x^2 + 12x - 2$

4  Teljes négyzetté kiegészítéssel alakítsd át a kifejezéseket!

a) $x^2 + 16x + 70$

c) $x^2 + 5x + 3,25$

b) $x^2 - 12x - 10$

d) $x^2 - 5x - 1,25$

9.A másodfokú egyenlet megoldása megoldóképlettel, diszkrimináns

Ha az a , b és c betű egy-egy adott valós számot jelöl, ahol $a \neq 0$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek 0, 1 vagy 2 gyöke van a valós számok körében.

– Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke a valós számok körében.

– Ha $b^2 - 4ac = 0$, akkor az egyenletnek 1 valós gyöke van, a $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ szám. Ezt az egyenlet **kétszeres gyökének** is nevezik.

– Ha $b^2 - 4ac > 0$, akkor az egyenletnek 2 különböző valós gyöke van, a $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ és a $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ szám.

Ezt a két gyököt együtt így szoktuk felírni: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ez a **másodfokú egyenlet megoldóképlete**.

Látható, hogy a gyökök száma attól függ, hogy a $(b^2 - 4ac)$ szám *negatív*, *0* vagy *pozitív*.

A $(b^2 - 4ac)$ számot a másodfokú egyenlet **diszkriminánsának** nevezzük és D -vel jelöljük.

(A diszkrimináns latin eredetű szó, eredeti jelentése: megkülönböztető, osztályozó.)

Például

– a $3x^2 + 7x + 5 = 0$ egyenlet esetében $a = 3$, $b = 7$ és $c = 5$, a diszkrimináns $D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 49 - 60 = -11 < 0$, ezért ennek az egyenletnek nincs valós gyöke;

– az $x^2 + 8x + 16 = 0$ egyenlet esetében $a = 1$, $b = 8$ és $c = 16$, a diszkrimináns $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$, ezért ennek az egyenletnek egy (kétszeres) valós gyöke van, mégpedig $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$; (ezt egyszerűbben is megkaphatjuk, mert $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$);

– a $2x^2 + 15x - 3 = 0$ egyenlet esetében $a = 2$, $b = 15$ és $c = -3$, a diszkrimináns $D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 225 + 24 = 249 > 0$, ezért ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke van: $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 \pm \sqrt{249}}{4}$.

$$x_1 = \frac{-15 + \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 + 15,78}{4} = 0,195; \quad x_2 = \frac{-15 - \sqrt{249}}{4} \approx \frac{-15 - 15,78}{4} = -7,695.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

9  Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $56x^2 - 13x - 3 = 0$

b) $7x^2 - 12x + 6 = 0$

c) $40x^2 - x - 15 = 0$

d) $30x^2 + 29x + 4 = 0$

10  Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $6x^2 - 4x - 45 = 35 - 3x^2 + 2x$

b) $x^2 + 5,2x - 3,2 = 0,5x^2 + 1,3x - 2,4$

11  Melyik egyenleteknek negatív a diszkriminánsa?

a) $x^2 + 4x + 17 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 11 = 0$

c) $1,2x^2 + 8x + 3,5 = 0$

d) $0,6x^2 - 5x - 1,4 = 0$

12  Adj olyan értéket b -nek, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen!

a) $2x^2 + bx + 18 = 0$

b) $3x^2 - bx + 75 = 0$

10. A kör kerülete, területe

Bizonyítható, hogy a kör kerületének és átmérőjének hányadosa állandó, azaz a kör kerülete és átmérője között egyenes arányosság van. Az arányszámot – a XVIII. század óta, Euler jelölése alapján – a görög perimetrosz, periféria (kerület) szavak kezdőbetűje miatt a görög π betűvel jelöljük.

A **kör kerülete** a kör átmérőjének π -szerese, vagyis ha a kör átmérőjét d -vel, sugarát r -rel, kerületét pedig K -val jelöljük, akkor $K = d\pi$, másképp $K = 2r\pi$.

A π irracionális szám, tehát végtelen nem szakaszos tizedestört.

Számolási feladatok esetén használhatjuk a számológépben található π értéket, vagy számolhatunk a 3,14 két tizedesjegyre kerekített értékkel. Megadhatjuk a választ π többszöröseként is, pl. egy 3,2 méter sugarú kör kerülete $6,4\pi$ méter.

Észrevehetjük, hogy a beírt szabályos sokszög oldalszámának növelése során egyre nagyobb lesz a beírt sokszög területe. A sokszög területe ugyanakkor nem haladhatja meg a **kör területének** nagyságát, mivel a sokszöget teljes terjedelmében tartalmazza a kör.

Minél jobban megnöveljük a beírt szabályos sokszög oldalainak számát, a sokszög területe annál inkább megközelíti a kör területének értékét.

A számolások alapján látható, hogy $\frac{T_{\text{nagy oldalszámú szabályos sokszög}}}{r^2} \approx \frac{T_{\text{kör}}}{r^2} \approx 3,14$.

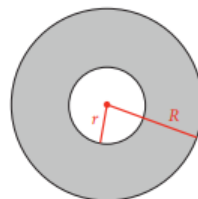
Bizonyítható, hogy a kör területének és sugara négyzetének hányadosa állandó, és az arányossági tényező π .

Az **r sugarú kör területe** $T = r^2\pi$ összefüggéssel számolható.

ELMÉLET

Két koncentrikus körvonal által határolt síkidom a **körgyűrű**.

Ha a körök sugara r és R , ahol $r < R$, akkor a körgyűrű területe $T = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.



1. Határozd meg a kör kerületét centiméterben és a kör területét négyzetcentiméterben, ha a kör átmérőjének hossza

- a) 2,6 cm
- b) 4,28 dm
- c) 53 mm.

Eredményeidet két tizedesjegy pontossággal add meg!

2. Tudjuk, hogy egy kör kerülete

- a) 628 cm
- b) 842 mm
- c) 0,93 m.

Add meg a kör területét négyzetcentiméterben, két tizedesjegyre kerekítve!

3. Egy kör területe

- a) 314 dm^2
- b) $113,1 \text{ cm}^2$
- c) $1,826 \text{ m}^2$.

Add meg a kör kerületét deciméterben, három tizedesjegyre kerekítve!

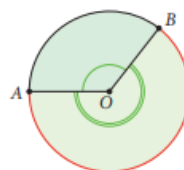
11. Középponti szög, körív, körcikk

Rajzoljuk meg egy kör két sugarát, az OA -t és az OB -t!

Így a körvonalat két **körívre**, a körlemez két **körcikkre** bontottuk.

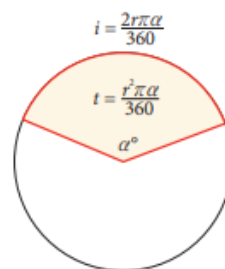
Két olyan szöget is látunk, amelyeknek O a csúcsa, az OA és az OB félegyenes pedig a két szára. Ezeket a szögeket az adott körben a megfelelő körívhez vagy körcikkhez tartozó **középponti szögeknek** nevezzük.

A körbe rajzolt két sugár két olyan középponti szöget ad meg, amelyeknek az összege egy teljeszög.



Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög α° -os, akkor a hozzá tartozó **körív hossza** a körkerület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i -vel jelöljük, akkor $i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180}$ (cm).

Ugyanebben a körben egy α° -os középponti szöghöz tartozó **körcikk területe** a körterület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm^2 -ben mért nagyságát t -vel jelöljük, akkor $t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ (cm^2).



4 📖 Oldd meg a következő feladatokat! Készíts vázlatot a körcikkekről!

- Mekkora a 12 cm sugarú körben annak a körívnek a hossza és körcikknek a területe, amelynek a középponti szöge 107° ?
- Mekkora a 181,5 mm ívhosszúságú, 200° -os középponti szögű körcikk területe?
- Mekkora a 10 m sugarú körben a 10 m ívhosszúságú körcikk középponti szöge és területe?

12. Számsokaságok statisztikai jellemzői

Egy véges számsokaság legfontosabb **statisztikai jellemzői**:

	Leírása
Átlag	a sokaság elemeinek az összegét elosztjuk az elemek számával
Módusz	a legtöbbször előforduló elem (lehet több módusz is)
Medián	a nagyság szerinti felsorolásban páratlan elemszám esetén a középen álló szám, páros elemszám esetén a középen álló két szám átlaga
Terjedelem	a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége

Ha az adatok gyakorisága ismert, akkor az átlag kiszámolható úgy, hogy a számokat megszorozzuk a gyakoriságukkal, ezeknek a szorzatoknak az összegét elosztjuk a gyakoriságok összegével. (Ezt az eljárást nevezzük **súlyozott számtani közép** számolásának.)

- 1** ➤ Add meg a következő számsokaságok főbb statisztikai jellemzőit!

a) 8, 9, 3, 5, 9, 4 b) 80, 90, 30, 50, 90, 40

- 2** ➤ Egy 30 számból álló adathalmaznak ismerjük a terjedelmét, átlagát, mediánját és móduszát. A négy közül melyik az a statisztikai jellemző, amelyiknek az értéke biztosan szerepel az adathalmaz elemei között?

- 3** ➤ Adott négy szám: 5, -2; -1; 0. Adj meg egy ötödik számot úgy, hogy

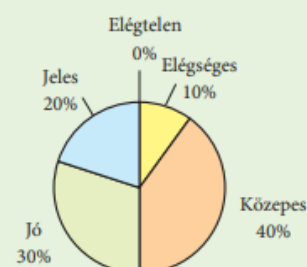
- a) az öt szám mediánja 0 legyen!
b) az öt szám átlaga 0 legyen!
c) az öt szám mediánja és egyetlen módusza megegyezzen!
d) az öt szám átlaga és mediánja megegyezzen!
e) az öt szám átlaga és egyetlen módusza megegyezzen!

- 4** ➤ Tizenegy tanuló olyan tesztoldozatot írt, amelyben 100 pontot lehetett elérni.

A tanulók elért pontszámai: 100; 100; 100; 63; 62; 60; 12; 12; 6; 2; 0.

- a) Add meg az elért pontszámok főbb statisztikai jellemzőit!
b) A csoportban az a vélemény van többségben, hogy nehéz volt a teszt. Tudsz-e érvelni a többség véleménye mellett a statisztikai mutatókra támaszkodva?

- 5** ➤ A két diagram a félév végi kémiaosztályzatokat mutatja egy iskola 10.A, illetve 10.B osztályában.



- a) Határozd meg, hogy mennyi a félévi kémiaosztályzatok terjedelme, módusza, mediánja és átlaga az egyes osztályokban!
b) Fogalmazd meg, hogy az egyes statisztikai jellemzők milyen módon olvashatók le a diagramokról!
c) Szerinted melyik osztályban lettek jobbak az eredmények? Milyen érvek szólnak az egyik, milyen érvek a másik osztály mellett?

13. Valószínűségszámítás

Véletlen jelenség, véletlen kísérlet

A valószínűségszámítás véletlen jelenségekkel, helyzetekkel foglalkozik. Amikor egy ilyen véletlen jelenséget megfigyelünk (és feljegyezzük annak kimenetelét), akkor **véletlen kísérletet** végzünk.

Például:

Két dobókocka feldobása egy véletlen jelenség. Véletlen kísérletet végzek, amikor konkrétan feldobok egy fehér és egy fekete dobókockát, és megfigyelem a dobás eredményét. A kísérlet kimenetele, hogy mennyit dobtam a fehér, és mennyit dobtam a fekete kockával.

Elemi események

Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.

Például:

Egy fehér és egy fekete dobókockával dobva egy elemi esemény, ha a fehér kockával 3-ast, a fekete kockával 4-est dobunk. Ebben a véletlen kísérletben 36 különböző elemi esemény következhet be.

Véletlen kísérletek és relatív gyakoriság

Azt tapasztaljuk, hogy ha a véletlen kísérletet nagyon sokszor, azonos körülmények között végezzük el, akkor egy konkrét kimenetel relatív gyakorisága egy jól meghatározott érték közelében ingadozik.

Például:

Ha egy pénzérmét nagyon sokszor feldobunk, akkor annak a relatív gyakorisága, hogy a dobás eredménye fej, várhatóan 0,5 közelében lesz.

Valószínűség

Ha egy véletlen esemény során az elemi események egyformán valószínűek (és a lehetséges elemi események száma véges), akkor az esemény **valószínűségét** úgy számolhatjuk, hogy a kedvező elemi események számát elosztjuk az összes elemi esemény számával.

A valószínűség jele P (a latin *probabilitas* szó kezdőbetűje, ami valószínűséget jelent).

Például:

- Két pénzérmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét érmen fej látható? Azt gondolhatnánk, hogy 3 kimenetel van: mindkét érmen fej, mindkét érmen írás, illetve egyiken fej és másikon írás, így a valószínűség $\frac{1}{3}$. De ezek nem egyformán valószínű elemi események! Az „egyik fej, másik írás” kimenetel kétféle módon valósulhat meg: lehet az első fej és a második írás, és lehet fordítva, az első írás és a második fej. Akkor írunk fel egyenlően valószínű elemi eseményeket, ha ezeket megkülönböztetjük. Egyenlően valószínű elemi események tehát: FF, FI, IF, II, ez összesen 4 lehetőség. Ebből 1 a kedvező, ezért a valószínűség $\frac{1}{4}$. Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság is 0,25 közelében lesz. Az előző két modell között az a különbség, hogy az egyikben a két pénzérmét egyformának gondoljuk, a másikban megkülönböztethetőnek. A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy megkülönböztethetők. Így a valószínűségeket a második modell írja le.
- Két dobókockával dobva 3 olyan elemi esemény van, amikor a dobott számok összege 10 (fehér hatos és fekete négyes, fehér ötös és fekete ötös, fehér négyes és fekete hatos). Ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10, úgy számolható, hogy a kedvező elemi események számát (3) osztjuk az összes elemi esemény számával (36). A valószínűség:

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ha az elemi események egyformán valószínűek



$$\text{egy esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

1. A **biztos esemény** mindig bekövetkezik, valószínűsége 1.
 2. A **lehetetlen esemény** sohasem következik be, valószínűsége 0.
 3. Ha az elemi események egyformán valószínűek, és számuk véges, amit jelöljünk n -nel, akkor
 - egy elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{1}{n}$;
 - ha k darab olyan elemi esemény van, amikor bekövetkezik az A esemény, akkor az A esemény valószínűsége az elemi esemény valószínűségének k -szorososa: $P(A) = \frac{k}{n}$.
 4. Ha két esemény olyan kapcsolatban van egymással, hogy egyszerre sohasem következnek be, ugyanakkor közülük az egyik biztosan bekövetkezik, akkor ezeket **egymást kiegészítő eseményeknek** vagy **komplementer eseményeknek** nevezzük. Ha egy esemény valószínűsége p , akkor komplementer eseményének valószínűsége $1 - p$.
- Például:*
- A „dobott szám hatos”, a „dobott szám nem hatos”: ezek komplementer események.

1 Egy repülőgépjárat 200 utasa közül 94-en magyar állampolgárok, 72-en angolok, 20-an hollandok és 14-en németek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utas állampolgársága

- a) magyar; c) nem angol;
b) holland vagy német; d) kínai?

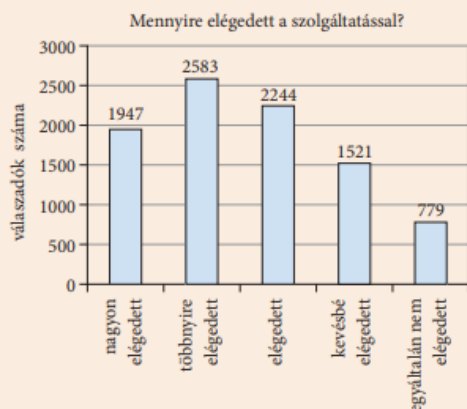
2 Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szabályos dobókockával dobva a dobás eredménye

- a) osztója 60-nak?
b) osztható 60-nal?

3 Egy dobozban 60 golyó van, egy részük fehér, másik részük fekete. Véletlenszerűen húzva egy golyót a fehér golyó húzásának valószínűsége 0,4, a fekete golyó húzásának valószínűsége 0,6.

- a) Hány fehér golyó van a dobozban?
b) Hány fehér golyót kellene még beletenni a dobozba, hogy a helyzet megforduljon, és a fehér golyó húzásának valószínűsége legyen 0,6?
c) Hány fekete golyót kellene kivenni a dobozból (az eredeti 60 golyó közül), hogy a helyzet megforduljon, és a fehér golyó húzásának valószínűsége 0,6 legyen?

1 Egy internetszolgáltató társaság nagyszámú ügyfél körében elvégzett, reprezentatívnak mondható felmérést készített arról, hogy ügyfelek mennyire elégedettek a szolgáltatásaikkal. Az eredményeket a grafikon szemlélteti.



Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ügyfél

- a) nagyon elégedett a szolgáltatással;
b) csak kevésbé vagy egyáltalán nem elégedett?

2 Egy egyetem 860 elsőéves hallgatója közül 312-en gazdasági szakra járnak, és az elsőévesek között 452 nő van. Az elsőéves hallgatók közül 195-en járnak gazdasági szakra. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott elsőéves egyetemista

- a) gazdasági szakra jár;
b) gazdasági szakra járó hallgatónő;
c) nem gazdasági szakra járó férfi hallgató;
d) gazdasági szakra járó férfi hallgató?

3 A táblázat egy repülőtér különböző parkolóiban álló autók számát mutatja.

	1. zóna	2. zóna	3. zóna	4. zóna
A parkoló	43	19	18	5
B parkoló	65	41	23	2
C parkoló	39	22	15	11

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő autó, amelyik elhajt a parkolóból

- a) az A parkoló 1. zónájából jön;
b) a B parkolóból jön;
c) nem a 4. zónából jön;
d) a C parkolóból vagy a 3. zónából jön?

14. Gyökös egyenletek

Ha két valós szám egyenlő, akkor a négyzetük is egyenlő: $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$.

Ezért ha egy szám megoldása az egyenletnek, akkor megoldása annak az egyenletnek is, melyet úgy kapunk, hogy az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük.

Visszafelé azonban nem teljesül ez az állítás. Ha két szám négyzete egyenlő, akkor lehet, hogy a számok különbözők voltak: nevezetesen egymás ellentettjei.

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \text{ vagy } A = -B.$$

Ezért a négyzetre emelés általában nem ekvivalens átalakítás. A négyzetre emelés után kapott egyenletnek több megoldása lehet, mint az eredeti egyenletnek. Kaphatunk **hamis gyököt**, azaz olyan értéket, amely eleme ugyan az értelmezési tartománynak, de az eredeti egyenletnek nem megoldása.

Ezért a négyzetre emelés után nagyon fontos az ellenőrzés.

Négyzetgyökös egyenletek megoldása:

Határozzuk meg az értelmezési tartományt!

Négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám.

Oldjuk meg az egyenletet!

Négyzetre emelés előtt, ha lehet, rendezzük úgy, hogy a gyökös tag önmagában álljon!

Ellenőrizzünk!

Vigyázat! Kaphatunk hamis gyököt! Helyettesítsünk be az eredeti egyenletbe!

2 Oldd meg grafikus módszerrel és algebrai úton is a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x} = x$

c) $\sqrt{x} = 2x - 6$

b) $\sqrt{x} = -x$

d) $\sqrt{x+1} = x-1$

3 Oldd meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{5x-9} = 3-x$

b) $\sqrt{13-6x} = 5-3x$

c) $\sqrt{5x+23} = x-7$

d) $5\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} + 18$

15. Másodfokú egyenlőtlenségek.

Másodfokú egyenlőtlenség grafikus megoldása

Rendezzük egy oldalra!

- Használjuk a mérleget!
- Ha negatív számmal szorzunk vagy osztunk, meg kell fordítani a relációs jel irányát!

Ábrázoljuk a hozzá tartozó függvényt!

- Mik a zérushelyek? Merre áll a parabola?
- Ha vannak zérushelyek, akkor elég, ha a két zérushelyet bejelöljük, és berajzoljuk, hogy merre áll a parabola.

Olvassuk le a grafikonról a megoldást!

- Figyeljük meg, hogy a grafikon melyik része helyezkedik el az x tengely felett, és melyik része alatta!

6.  Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 11x \leq 0$

b) $x^2 - 7x > 0$

7.  Oldd meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $x^2 - 11x + 30 \leq 0$

b) $-x^2 - 3x > 0$

c) $-x^2 + 3x + 4 > 30$

16. Polinom gyöktényezős alakja

1. Összetartozó fogalmak (a, b, c valós számok, $a \neq 0$)

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$	másodfokú függvény	zérushely
$ax^2 + bx + c = 0$	másodfokú egyenlet	megoldás vagy gyök
$ax^2 + bx + c$	másodfokú polinom vagy másodfokú kifejezés	gyök

2. Polinom gyöktényezős alakja

Ha egy másodfokú polinomnak van valós gyöke, akkor szorzattá alakítható.

A szorzattá alakítás módja:

1. Meghatározzuk a polinom gyökeit a megoldóképlet segítségével.
2. Ha egyetlen valós gyöke van (x_1), akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
3. Ha két valós gyöke van (x_1 és x_2), akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ezt az alakot a polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük.

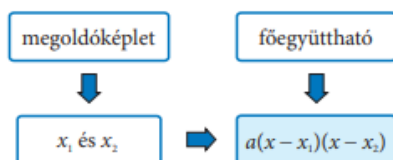
A gyöktényezős alakban szereplő x_1 és x_2 konkrét számok, amelyek a megoldóképlet segítségével kiszámolhatók.

Ha a másodfokú egyenletnek egyetlen valós gyöke van, akkor azt **kétszeres gyöknek** nevezzük. (Ezt az esetet úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a két gyök egybeesik, azaz $x_1 = x_2$.)

Egy másodfokú polinomot egyértelműen meghatározza a főegyütthatója és két gyöke. Az $ax^2 + bx + c$ és az $a(x - x_1)(x - x_2)$ kifejezések értéke ugyanakkor lesz nulla, azaz az $x = x_1$ és az $x = x_2$ esetekben. A főegyüttható és a gyökök egyenlőségéből következik, hogy a helyettesítési értékük bármely x esetén egyenlő.

Például

- A $3x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei 1 és $-\frac{2}{3}$, ezért a $3x^2 - x - 2$ polinom gyöktényezős alakja $3(x - 1)(x + \frac{2}{3})$.
- A $3x^2 - x + 2 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában nincs gyöke, ezért a $3x^2 - x + 2$ polinomnak nincs gyöktényezős alakja.
- A $4x^2 - 12x + 9$ polinomnak egy gyöke van, az $1,5$; a polinom gyöktényezős alakja $4(x - 1,5)(x - 1,5)$.
Az $1,5$ -et a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet **kétszeres gyökének** nevezzük.



16. Alakítsd szorzattá a polinomokat!

- a) $3x^2 - 4x - 7$ b) $4x^2 - 16x - 9$

17. Adj meg olyan egész együtthatós másodfokú polinomot, melynek zérushelyei

- a) $\frac{2}{9}$ és $\frac{11}{3}$; b) $\frac{7}{4}$ és $-\frac{5}{6}$!

18. Írd fel az alábbi polinomokat gyöktényezős alakban!

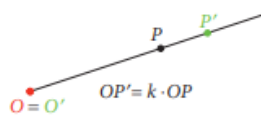
- a) $5x^2 + 3x - 8$ b) $0,2x^2 - 0,1x - 2,1$

19. Írd fel a polinom gyöktényezős alakját!

- a) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{15}{2}$ c) $-2x^2 + x + 28$
b) $-x^2 - x + \frac{15}{4}$ d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{21}{2}$

17. Hasonlóság

A középpontos nagyítás és kicsinyítés összefoglaló neve egy geometriai transzformáció, a **középpontos hasonlóság**.



Definíció: Adott egy O pont (a **középpontos hasonlóság középpontja**) és egy k pozitív valós szám (a **hasonlóság aránya**).

A tér bármely P pontjához hozzárendeljük a P' pontot úgy, hogy

- az O pont képe önmaga (azaz $O = O'$);
- ha $P \neq O$, akkor P' az OP félegyenesének azon pontja, melyre igaz, hogy az OP' szakasz hossza az OP szakasz hosszának k -szorososa.

Ez a hozzárendelés **középpontos nagyítás**, ha $1 < k$, **középpontos kicsinyítés**, ha $k < 1$, egybevágósági transzformáció, ha $k = 1$.

Szokás a középpontos hasonlóságot negatív k -ra is értelmezni, ekkor a transzformáció a $|k|$ arányú, O középpontú középpontos hasonlóság és egy O középpontú tükrözés egymásutánja.

Definíció: Ha két alakzathoz van olyan középpontos hasonlóság, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a alakzatokat középpontosan hasonlóknak mondjuk.

Ha egy alakzat középpontosan hasonló képét valahova elmozdítjuk és/vagy tükrözzük, akkor a keletkező harmadik alakzatra azt mondjuk, hogy ez **hasonló** az első alakzathoz. A hasonlóság jele: $\sim$

A középpontos hasonlóság aránya egyúttal az itt fellépő hasonlóságnak is aránya.

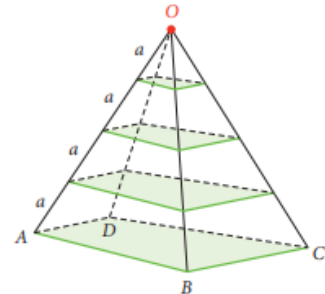
Ha a hasonlóság aránya 1, akkor egybevágóságról beszélünk. Ez azt jelenti, hogy az egybevágósági transzformációk halmaza valódi részhalmaza a hasonlósági transzformációk halmazának.

Ha egy síkidomot k arányú középpontos hasonlósággal transzformálunk, akkor a transzformáció során kapott alakzat kerülete az eredeti alakzat kerületének k -szorososa, területe pedig az eredeti alakzat k^2 -szerese.

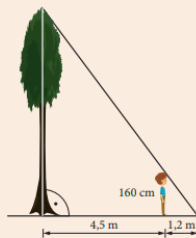
Például

Az ábra $ABCD$ -vel párhuzamos síkú sokszögei kerületének aránya (a legkisebttől indulva): $1 : 2 : 3 : 4$; a területük aránya: $1 : 4 : 9 : 16$.

A fenti összefüggések nem csak a középpontosan hasonló alakzatok esetén állnak fenn. Bizonyítható, hogy két **hasonló** sokszög (vagy bármely más síkidom) kerületének aránya a hasonlóságuk arányával (k -val), területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével (k^2 -tel) egyenlő.

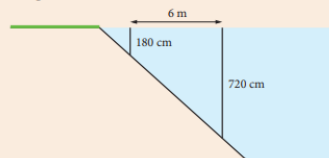


1. A 160 cm magas Péter egy fa árnyékának vonalában áll meg a fától 4,5 méterre, hogy az árnyéka még éppen befér a fa árnyékába. (Ha egy kicsit is előrelépne, akkor árnyéka már kilógna a fa árnyékából.) Milyen magas a fa, ha tudjuk, hogy az árnyékának vége éppen 1,2 méterre van Pétertől?



2. a) Milyen méretarányú az a térkép, mely a valószínűleg 4,5 km hosszúságú utat 225 mm hosszúságú szakasszal jelzi?
b) Mekkora a 900 m²-es telek területe az 1 : 300 méretarányú tervrajzon?

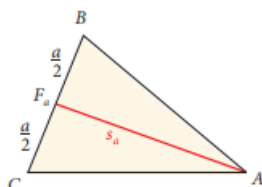
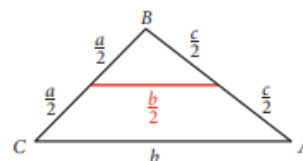
3. Biztonsági okokból egy folyó mélységét jelző táblákat helyeznek ki a folyóparttól különböző távolságokban. A parttól távolodva egy 180 cm mélységet mutató, majd 6 méterrel bentebb egy 720 cm mélységet mutató jelzőtáblát helyeznek el. A parttól mérve milyen távolságokban helyezték el a táblákat, ha tudjuk, hogy a meder lejtése az adott távolságokon belül nem változik?



18. Háromszögek középvonalai, súlyvonalai

Ha összekötjük egy háromszög két oldalának a felezőpontját, akkor a háromszög egyik **középvonalát** kapjuk meg. Bizonyítható, hogy ez a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és feleolyan hosszú, mint ez az oldal.

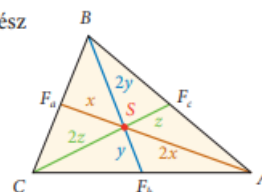
Minden háromszögnek három középvonala van.



Ha összekötjük egy háromszög egyik csúcsát a vele szemközti oldal felezőpontjával, akkor a háromszög egyik **súlyvonalát** kapjuk meg (az ábrán az A csúcsához tartozó súlyvonalat rajzoltuk meg). Minden háromszögnek három súlyvonala van.

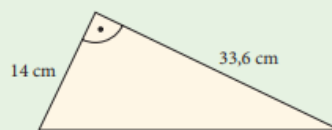
Igaz a következő két állítás:

- Két súlyvonal 2 : 1 arányban osztja egymást, a hosszabbik rész csatlakozik a csúcshoz.
- Egy háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást. Ezt a közös pontot a háromszög **súlypontjának** nevezzük. A súlyvonal a háromszöget két egyenlő területű részre osztja.



FELADAT

4. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 14 cm és 33,6 cm.
- Mekkora a háromszög középvonalai?
 - Mekkora az átfogóhoz tartozó súlyvonal hossza?
 - Mekkora a befogókhoz tartozó súlyvonalak hossza?
 - Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?



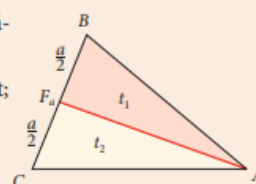
HÁZI FELADAT

- Mekkora távolságra van a 3,8 cm oldalú szabályos háromszög súlypontja a háromszög csúcsaitól?
 - Mekkora távolságra van a 4,5 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög súlypontja a háromszög oldalaitól?
- Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 mm, szára 29 mm hosszú.

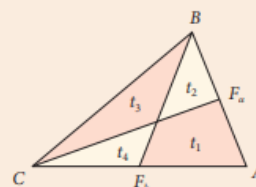
 - Milyen hosszúak a háromszög középvonalai?
 - Mekkora távolságra van a háromszög súlypontja az alaptól?
 - A súlypontot összekötjük a háromszög csúcsaival. Mekkora területű háromszögekre bontottuk fel az eredeti háromszöget?
 - Megrajzoljuk a háromszög három középvonalát. Mekkora a középvonalak által meghatározott háromszög területe?

- Rajzold meg egy háromszögnek

 - az egyik súlyvonalát;



- két súlyvonalát!



Mennyi az egyes részek területének az aránya?

- Egy háromszög egyik súlyvonala 6 cm, egy másik 4,5 cm hosszú. Ez a két súlyvonal merőleges egymásra.

 - Mekkora ennek a háromszögnek az oldalai?
 - Mekkora ennek a háromszögnek a középvonalai?

